УДК 535.31

Каустические поверхности при отражении гомоцентрических пучков лучей сферой.

Г.С.Мельников, А.С.Попов

ГП ГНЦ
“Государственный оптический институт
им. акад. С.И. Вавилова
199034 Биржевая линия 12
г. Санкт-Петербург
тел.(812)218-16-30. Fax (812)218-37-20
E-mail liader@ soi.spb/su.

Приводятся результаты теоретических исследований по описанию каустических поверхностей. Каустики получены для случаев отражения гомоцентрических пучков лучей с произвольным расположением источника относительно сферического рефлектора. Установлено, что при расположении источника в бесконечности или на поверхности сферы параметрическое уравнение каустикой кривой обращается в уравнение обыкновенной эпициклоиды. Для исследования характеристик хода лучей предложен кинематический метод.

После отражении света точечного источника от сферической поверхности в пространстве можно наблюдать, при достаточном рассеянии, фигуру концентрации энергии, которая получила название каустической поверхности. Если пользоваться терминологией лучевой модели, то каустическая поверхность образуется лучами, касательными к ней. Т.о. если известна ее форма, то можно определить положение любого луча из уравнения касательной. Форма каустической поверхности полностью определяет и аберрации в изображении точки после отражения.

Точное аналитическое описание каустик и поверхностей текущих фокусов (ПТФ) для сферических рефлекторов, работающих в параллельном потоке получено одним из авторов в работе [1]. Настоящая статья подводит итог теоретическому описанию результатов исследования каустик сферических отражателей для произвольного расположения источника. Кинематическая аналогия для описания произвольных каустик предложена А.С.Поповым, с помощью которой им получены общие выражения для произвольного расположения источника.

Для вывода уравнения каустики воспользуемся рис.1.

Окружность О радиуса r представляет меридиональное сечение сферической поверхности. На расстоянии l от центра окружности расположен точечный источник И. Произвольный луч, отразившись от поверхности в точке $\grave{A}_1$ в направлении A_2, коснется каустики в некоторой точке М. Положение этой точки и уравнение меридионального сечения каустики в параметрической форме можно задать в виде

$$X = r\cos\varphi - m\cos(\varphi+\alpha) \qquad (1)$$
$$Y = r\sin\varphi - m\sin(\varphi+\alpha),$$

где m - расстояние A_1M

φ - угол, определяющий положение нормали О A_1,

α - угол падения.

Выразим параметры m и α через известные r, l и текущий параметр - φ (l в данном случае отрицательно). Для определения угла α рассмотрим Δ A_1ИО. По теореме косинусов имеем:

$$b^2 = l^2 + r^2 - 2rl \cos \varphi, \qquad (2)$$

где b - длина стороны A_1И. По теореме синусов -

$$\sin \alpha = - l/b(\sin \varphi). \qquad (3)$$

Из (2) и (3), используя основное тригонометрическое тождество находим

$$\cos \alpha = (r - l \cos \varphi)/b. \qquad (4)$$

Используя формулы для синуса и косинуса суммы двух углов и формулы (3), (4) получим

$$\cos (\varphi + \alpha) = (r \cos \varphi - l \cos 2\varphi)/b \qquad (5)$$
$$\sin (\varphi + \alpha) = (r \sin \varphi - l \sin 2\varphi)/b.$$

Для определения m в формуле (1) воспользуемся следующей кинематической аналогией (см. рис.1). Пусть радиус О A_1 равномерно разворачивается вокруг точки О против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью. При этом точка A_1 будет двигаться по окружности с постоянной по величине скоростью $\boldsymbol{V_1}$, направленной по касательной к окружности. Линия A_1A_2, представляющая отраженный луч, будет "обкатывать" каустическую поверхность, касаясь ее в некоторой точке М, которая является мгновенным центром вращения линии A_1A_2. Для нахождения положения этого центра необходимо знать проекции скоростей точек A_1 и A_2 на перпендикуляр к A_1A_2. Величина скорости точки A_2 определяется двумя слагаемыми - скоростью точки A_1 и скоростью изменения дуги A_1A_2, которая равна скорости изменения дуги A_0A_1(эти дуги равны в каждый момент времени т.к. угол падения равен углу отражения). Углы между векторами скоростей и их нормальными проекциями, также равны углу падения, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Дуга A_0A_1 изменяется за счет суммарного движения точек A_0 и A_1. Как следует из рисунка, скорость точки A_0 определяется выражением:

$$V_0 = V_1 e,$$

где $e = c/b$ - отношение длины отрезка A_1И к A_0И.
Таким образом, скорость точки A_2 определяется равенством:

$$V_2 = V_1 + (V_1 + V_0) = V_1(2+e).$$

Из подобия треугольников скоростей находим m:

$$m = a/(3 + e). \qquad (6)$$

Из D A_1БО

$$a = 2r \cos a\,. \tag{7}$$

По свойству касательной и секущей $cb = d^2$, откуда

$$e = (l^2 - r^2)/b^2 \tag{8}$$

Подставив (5), (6), (7), (8) в (1) и проведя ряд упрощений, окончательно получим

$$X = r(3 \cos \varphi - \cos 3\varphi - 2\rho)/g \qquad (9)$$
$$Y = r(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi)/g\,,$$

где $\rho = r/l$,

$g = 4+2\rho^2 - 6\rho \cos \varphi$.

На рис.2 приведены примеры меридиональных сечений каустических поверхностей полученных по формулам (9) (жирная линия), демонстрирующие совпадение с лучевой моделью.

Анализ формул показывает, что при ρ равном 0 и 1 эта линия является эпициклоидой. Так, при $\rho = 0$, соответствующем случаю, когда источник находится в бесконечности, уравнения (9) приводятся к виду:

$$X = r(3 \cos \varphi - \cos 3\varphi)/4 \qquad (10)$$
$$Y = r(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi)/4\,.$$

Это уравнение обыкновенной эпициклоиды, у которой радиус направляющей равен половине радиуса зеркала, а производящего круга - его четверти, что совпадает с результатом, полученным в [1]. Если источник находится на поверхности сферы ($\rho = -1$), уравнения (9) принимают вид:

$$X = r(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)/3 \qquad (11)$$
$$Y = r(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)/3\,.$$

Это, также, уравнения обыкновенной эпициклоиды, у которой радиус направляющей и производящего круга равны одной трети радиуса зеркала.

Если значения ρ по модулю находится в пределах от 1 до 2, то уравнения (9) имеют по две точки разрыва, положение которых определяется равенством нулю знаменателя g. При нахождении источника вне сферы, часть каустической кривой, ближняя к источнику и заключенная между крайними лучами соответствует мнимому изображению. Следует отметить, что изменение знака l приводит к симметричному отображению каустики относительно оси OY. В зависимости от величины ρ, меридиональное сечение каустики может иметь 1,2 или 4 точки возврата, положение которых соответствует экстремумам функций X и Y. Точки, которые лежат на оси OX совпадают с положением изображений точки, рассчитанным по формулам параксиальной оптики.

Использую приведенную выше кинематическую аналогию можно получить уравнения каустики при нескольких отражениях от одной сферической поверхности (рис.3)

$$X = r \cos(\varphi - \gamma_i) - m_i \cos(\varphi - \gamma_i + \alpha) \tag{12}$$

$$Y = r \sin(\varphi - \gamma_i) - m_i \sin(\varphi - \gamma_i + \alpha),$$

где γ_i - угол дуги À$_1$A$_i$,

m_i - расстояние от точки последнего отражения до точки касания каустики.

Дуга À$_1$A$_i$ состоит из i-1 равных дуг, величина которых определяется выражением $\pi - 2\alpha$. Следовательно

$$\gamma_i = (\pi - 2\alpha)(i-1). \qquad (13)$$

В соответствии с кинематической аналогией, скорость точки A$_i$ определяется выражением:

$$V_i = V_1(i+(i-1)e),$$

а скорость точки A$_{i+1}$ -

$$V_{i+1} = V_1(i+1+ie).$$

Из подобия треугольников скоростей находим m_i:

$$m_i = a(i+(i-1)e)/(2i+1+(2i-1)e). \qquad (14)$$

Если $r = 0$, уравнения (12) после подстановки (13), (14) и упрощения приводятся к виду:

$$X = (-1)^{i+1}\, r\, (h \cos pj\ - p \cos hj)/(4i) \qquad (15)$$
$$Y = (-1)^{i+1}\, r\, (h \sin pj\ - p \sin hj)/(4i)$$

где $h = 2i+1$,

$p = 2i-1$.

Последнее уравнение представляет параметрическое уравнение эпициклоиды, что подтверждает результаты полученные в [1].

Таким образом, в настоящей статье получены точные параметрические уравнеия каустик для однократных и многократных отражений света точечного источника с произвольным его расположением относительно рефлектора сферического типа.

Выводы:

1. Каустики от точечного источника расположенного произвольно относительно отражающей сферы являются поверхностями вращения каустической кривой с 1,2 или 4 точками возврата, в которых концентрируются потоки лучей. Эти точки соответствуют значениям аргумента φ в параметрическом уравнении каустической кривой, при котором функции X и Y, одновременно, имеют экстремум. Точки возврата, лежащие на оптической оси совпадают с положением изображений точки, рассчитанным по формулам параксиальной оптики.
2. При расположении источника на расстоянии l, удовлетворяющем условию $r/2 < l < r$, кривые имеют точки разрыва второго рода. При $l = r/2$ точки разрыва и точка возврата лежат на оси в бесконечности.
3. Каустические кривые от источников, расположенных в бесконечности и на поверхности сферы представляют эпициклоиды с модулем 1/2 и 1, соответственно.
4. При расположении источника в бесконечности каустика многократных отражений представляет эпициклический тор с модулем, равным i - 1/2, где i - число отражений.

Список литературы

1. Мельников Г.С. Поверхности текущих фокусов в семействах каустических лучей многократного отражения от рефлекторов цилиндрического и сферического типов, Оптический журнал (план выпуска 4 квартал 1998 г.)

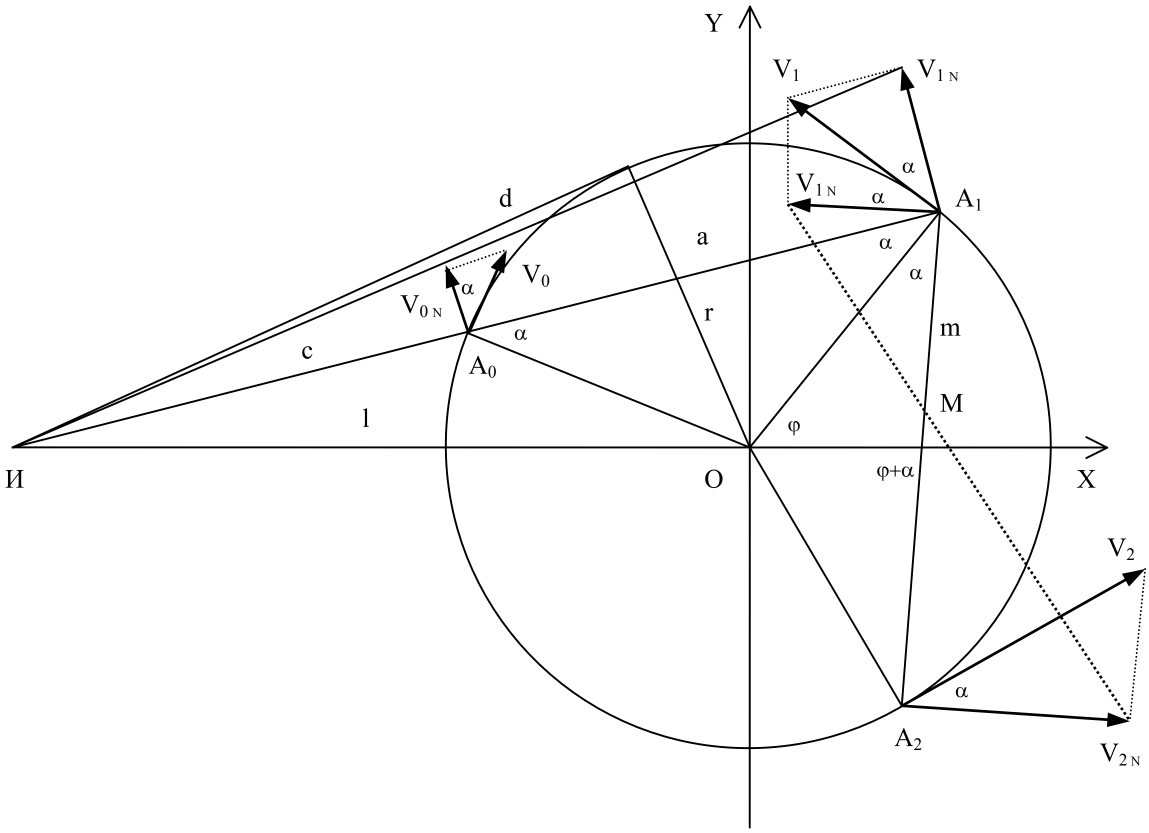

Рис.1 Кинематическая аналогия при отражении

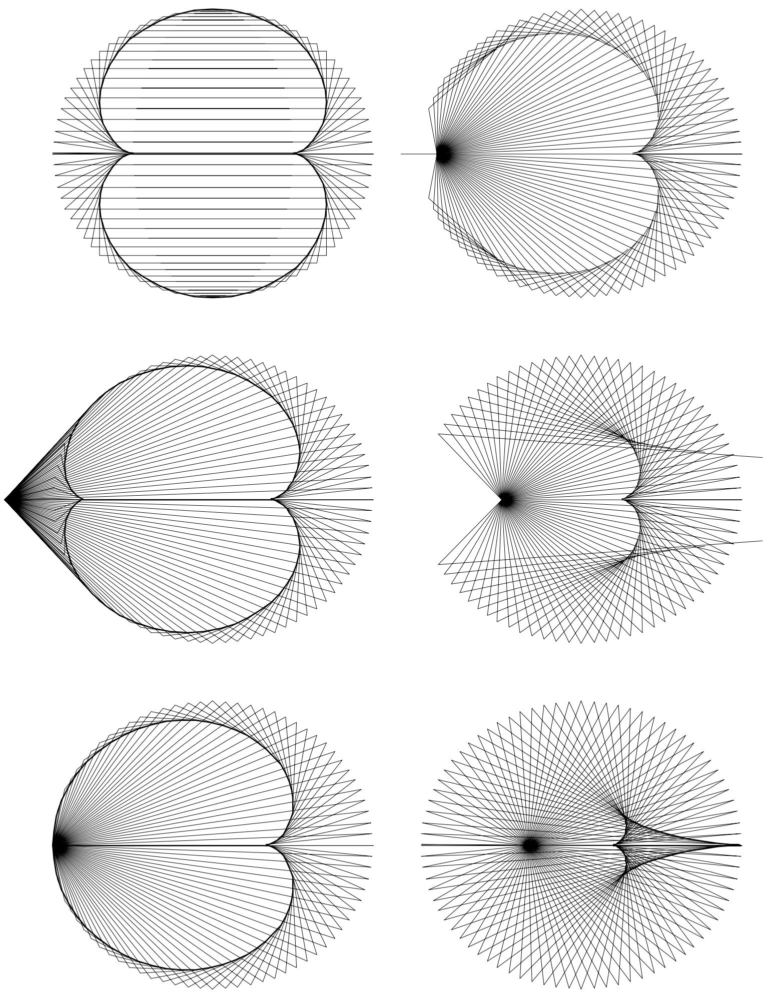

Рис.2 Примеры меридиональных сечений каустик

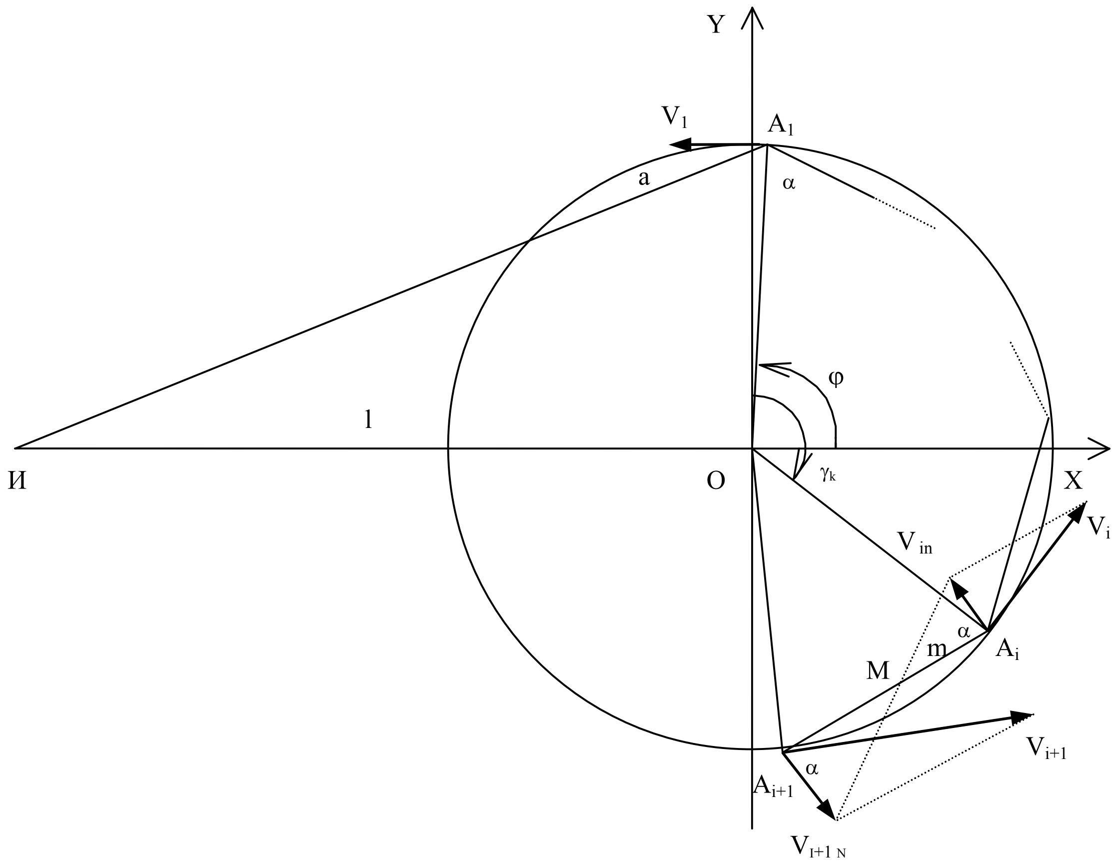

Рис.3. Кинематическая аналогия при нескольких отражениях