ФРАКТАЛЬНАЯ ОПТИКА.

Мельников Г.С.

ГП ВНЦ
"Государственный оптический институт
им. акад. С.И. Вавилова"
199034 Биржевая линия, 12
г. Санкт- Петербург
тел. 3112201, факс (812)2188065.

Теоретически обосновываются и описываются результаты экспериментальной проверки фрактальных свойств траекторий движения световых частиц, распростаняемых в обёмных световодных резонаторах цилиндрического типа по модовым траекториям (геометрическим продольным, поперечным, продольно-поперечным и продольно-радиальным модам). На основе анализа этих свойств и привлечения результатов развития методов теории чисел (целых, рациональных, иррациональных) предлагается авторская трактовка гносеологии фрактальности.[1] Обсуждаются уравнения движения частиц в световодах. Обосновываются и описываются свойства новых оптических элементов - многомодовых интирферометров Фабри- Перо.

1.ТЕОРИЯ РАСПРОРСТРАНЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФРАКТАЛЬНОЙ ОПТИКИ.

Рассмотрим некорые основные положения, касающиеся распространения световых лучей в цилиндрических телах по аналогии с принципами, выработанными для описания законов математических бильярдов .

Как отмечалось выше, фрактальными многоугольниками могут быть названы такие многоугольники, которые образуют ***n***-вершин (точек отражения за ***m***-"оборотов" вокруг центра кривизны отражающей поверхности (или кривой в двумерном рассмотрении), т.е. многоугольники, имеющие коэффициент фрактальности

$$k=n/m \qquad (1)$$

Если коэффициент фрактальности представлен, в общем случае, как ***k=n/m,*** то при ***k-*** дробно-рациональном , получаем замкнутый на ***n-*** ном отражении многоугольник. При этом, сторона многоугольника (в световодном элементе– длина свободного пробега от одного отражения до другого отражения) "заметает" конечную площадь за ***m-*** оборотов. В случае ***k-*** трансцендентном, перемещение вершин такого многоугольника и "заметание" конечной площади будет совершаться при ***n*** и ***m*** стремящихся к бесконечности, и при этом текущие вершины никогда не попадают в точку первого отражения. Другими словами, трансцендентный фрактальный многоугольник – фигура не замкнутая.

1.1 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ СВЕТА В ОДНОФРАКТАЛЬНЫХ СВЕТОВОДАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТИПА.

На основании вышеописанных физических и теоретических предпосылок [1] выведены формулы, позволяющие структурировать распространение парциальных световых лучей, вступающих в режим многократного отражения от криволинейных и плоских поверхностей, ограничивающих оптические световодные элементы фрактальной оптики. Как было установлено, исходный гомоцентрический пучок света при первом отражении разбивается на парциальные группы, характеризуемые рациональными значениями коэффициентов фрактальности. Эти группы соответствуют поперечным, продольным и продольно-поперечным геометрическим модам и субмодам

Тем самым автору удалось снять неопределенности в задачах описания текущих координат светового луча (текущего положения единичного фотона, перемещающегося в световодном элементе в процессе многократного отражения от ограничивающих световод поверхностей раздела) .

Так, для описания поперечных геометрических мод однофрактальных оптических элементов кругового цилиндра успешно могут быть использованы формулы некруговой тригонометрии [1] пригодные для определения координат X,Y (в плоскости Z = 0). Эти выражения выведенны автором в работе [2].

$$\sin_{k,\varphi}(\omega t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\cdot\sin(\omega t)}{\cos\left(\omega t - \frac{\pi(2p+1)}{k} - \varphi_0\right)}, \qquad (2)$$

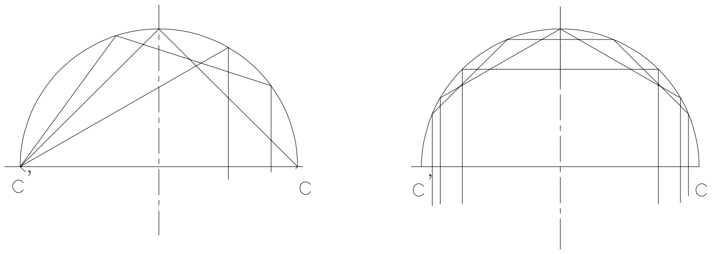
$$\cos_{k,\varphi}(\omega t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\cdot\cos(\omega t)}{\cos\left(\omega t - \frac{\pi(2p+1)}{k} - \varphi_0\right)} \qquad (3)$$

при заданных начальных и граничных условиях: начальная фаза **$0 \le \varphi_0 \le \pi/k$, $p = 0,1,2,...$; $\omega t \in [2\pi p/k + \varphi_0;\ 2\pi(p+1)/k + \varphi_0]$; $k \ge 2$.**

Для описания продольно-поперечных мод добавляется параметр l связанный с уголом наклона β в плоскости ***XY***. В этом случае ***Z*** можно определить по формуле

$$Z_{k,l} = 2\tau R\cos(\alpha)tg(\beta) = 2\tau l r\cos(\alpha)\sin(\beta) = 2\tau l R\sin(\pi/k)\sin(\beta) \qquad (4)$$

где $l = 1/\cos(\beta)$, $k = n/m$, $\tau \in 0,1,2.3...$



а). б).

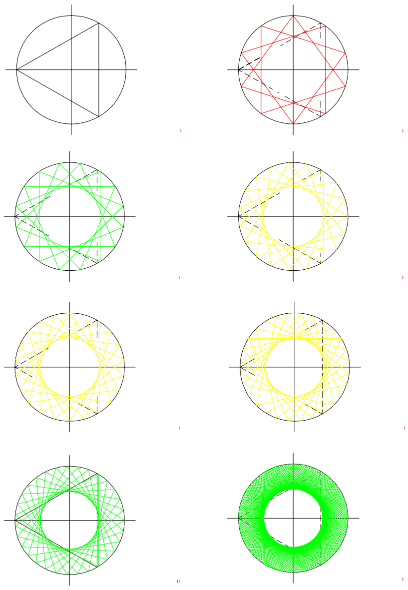


Рис. 1 Результаты математического моделирования траекторий фотонов в однофрактальных световодных системах

Результаты математического моделирования траекторий фотонов в однофрактальных световодных системах приведены на рис.1а и1б.

1.2 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ СВЕТА В БИФРАКТАЛЬНЫХ СВЕТОВОДАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТИПА.

Характер распространения световых лучей в бифрактальных световодных элементах- трубчатых цилиндрах усложняется тем, что световые внепараксиальные лучи вступают в многократное отражение не только от внешней криволинейной , ограничивающей элемент, поверхности радиуса ***R*,** но могут также отразиться от внутренней поверхности радиуса ***r***.

В случае, когда отражение лучей от внутренней поверхности не происходит или отражение лучей идёт по касательной к поверхности раздела радиуса ***r*,** световые лучи описываются обычными вышеприведёнными выражениями для однофрактальных световодных систем, характеризующих поперечные и продольно-поперечные модовые траектории.

Когда отражение лучей поочерёдно происходит от поверхностей радиусов ***R*** и ***r*** , имеем общий случай описания движения по радиально-поперечным модовым траекториям.

Для вывода общих уравнений распространения лучей рассмотрим пример рацинального деления окружностей радиусов ***R*** и ***r*** конечным числом точек отражения световых лучей. Другими словами для вывода общих выражений, определяющих положение поперечных и радиально-поперечных модовых траекторий мы исходим из рассмотрения упрощенного варианта. Из варианта, в котором соотношения радиусов внешней окружности, внутренней окружности и коэффициентов фрактальности ***k=n/m и p=η/μ***, определяющих делимости этих окружностей в целых, дробных, иррациональных и трансцендентных отношениях приводят к случаю их делимости в целых отношениях. Указанный случай приведён на рис.1б (***k***=8; ***p***=3)

Из рис.2 видно, что луч света, введённый из точки **M** в световодную полость, ограниченную поверхностями раздела радиусов ***R*** и ***r***, под углом ***ψ*** к нормали OM, проходящей через центр отмеченных выше концентрических окружностей, поочерёдно отражается от поверхностей радиусов ***r*** и ***R*** под углами ***φ*** и ***ψ*,** соответственно от аналогичных нормалей к внутренней и внешней ограничивающих поверхностей.

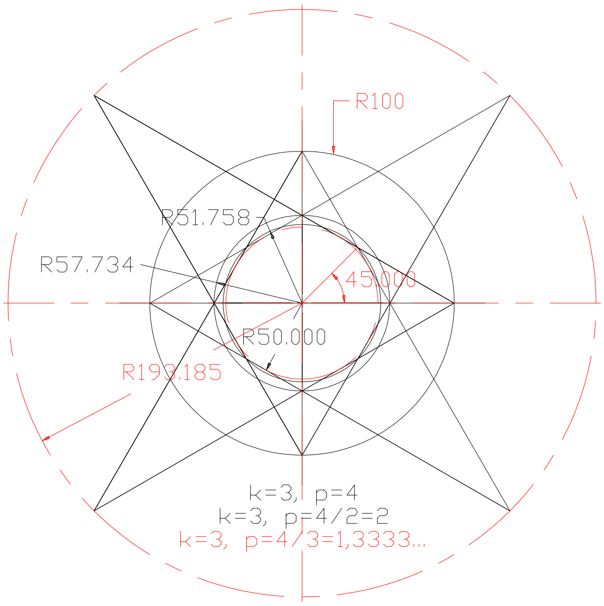


Рис. 2. Результаты математического моделирования траекторий фотонов в бифрактальных световодных системах.

В результате рассмотрения в плоскости XY системы криволинейных треугольников типа **OMN** и **NOQ** можно записать следующие основополагающие соотношения

$$\gamma = 2\cdot\pi/\rho(\mu,\eta)\ ;\alpha = \pi/2 - \pi/\kappa(m,n)$$

и $L/\sin(\pi/\rho(\mu,\eta))=r/\sin(\pi/2 - \pi/\kappa(m,n))=R/\sin(\pi/2 -(\pi/\rho(\mu,\eta)-\pi/\kappa(m,n))$ **(5)**

На основании которых делаем предположение, что при своём текущем движении парциальная группа лучей (цугов фотонов) совершает текущие перемещения в кольце концентрических окружностей ***R*** и ***r*** с периодическим изменением направления движения на границах криволинейных ограничивающих поверхностей.

В этом случае можно ввестти угловую параметрическую функцию

$$G(m,n,\mu,\eta)=\cos(\pi/k)\cdot\cos(\pi/p)/(\cos(\pi/k)-\sin(\pi/p)\cdot\sin(\pi\cdot(k-p)/k\cdot p)) \qquad (6)$$

связанную с коэффициентами фрактальности:

-по окружности радиуса ***R***

$$\kappa(m,n)=n/m \qquad (7)$$

-и по окружности ***r***

$$\rho(\mu,\eta)=\eta/\mu \qquad (8)$$

Следующую функцию назовём функцией коммутации на отражающих поверхностях (функция текущего времени, выраженная в текущей смене точек отражения $\tau\in 0,1,2.3...)$

$$S(\tau)=(1+(-1)^{\tau})/2 \qquad (9)$$

И в результате функция текущего движения ***F*** запишется

$$F(m,n,\mu,\eta,\tau)=G(m,n,\mu,\eta)+S(\tau)\cdot G(m,n,\mu,\eta) \qquad (10)$$

Откуда для текущих координат ***X*** и ***Y*** получим выражения

$$Y(m,n,\mu,\eta,\tau)=R\cdot F(m,n,\mu,\eta,\tau)\cdot\sin(\tau\cdot\pi/p) \qquad (11)$$

$$X(m,n,\mu,\eta,\tau)=R\cdot F(m,n,\mu,\eta,\tau)\cdot\cos(\tau\cdot\pi/p) \qquad (12)$$

Как видно, функция коммутации изменяится на интервале от 0 до1.

При достижении $S(\tau)=0$ фотоны отражаются от поверхности с радиусом ***r***

$$r=R\cdot G(m,n,\mu,\eta) \qquad (13)$$

При достижении функциуй коммутации значения $S(\tau)=1$,фотоны отражаются от поверхности радиуса ***R*** . В промежуточных значениях τ в световодах с однородным материалом по показателю преломления, фотоны перемещаются по прямой между двумя точками отражения, соответствующих

$S(\tau)=0$ и $S(\tau)=1.$

Для описания движения фотонов по радиально-продольным модовым траекториям, дополнительно к выражениям ***(11)*** и ***(12)*** необходимо определять текущие значения координаты ***Z***, которые определяются выражением***(4)***.

Из анализа выражений ***(4...12)*** можно видеть что в бифрактальных системах коэффициент фрактальности $\kappa(m,n)=n/m$ определяется делимостью ограничивающих поверхностей радиусов ***R*** и ***r*** в целых, рациональных, иррациональных и трансцедентных отношениях.

Коэффициент фрактальности $\rho(\mu,\eta)=\eta/\mu$ связан с секторно-угловым делением световодного кольца бифрактальтных оптических систем и задаётся углом ввода в световодную полость лучей в точке ***O*** (Рис 1б и выражения ***(5)***).

При этом:

-при равенстве коэффициентов фрактальности $\kappa(m,n)=\rho(\mu,\eta)$ выражения ***(11)***и ***(12)*** переходят в выражения ***(2)*** и ***(3)*** и малая окружность превращается в граничный концентрический круг, радиус которого определяется выражением ***(13)***, отражение от которого происходит по касательным к окружности ***r*** , чем и доказывается. что бифрактальная световодная система для $\kappa(m,n)\geq\kappa(m,n)=\rho(\mu,\eta)$ переходит в однофрактальную систему.

Из***(4...13)*** также видно, что для создания световодных систем с рациональными значиниями коэффициентов фрактальности $\kappa(m,n)$ и $\rho(\mu,\eta)$ внутренний радиус трубчатого цилиндра должен быть (для каждой радиально-поперечной моды) вполне определённой величиной, характеризуемой выражением ***(13)*** .

Для произвольно-бифрактальных систем соотношенние радиусов R и r характеризует те радиально-поперечные модовые и субмодовые траектории, которые при выбранных радиусах внешней и внутренней окружностей позволяют замкнуться траекториям на μ-ом обороте в соответствии с выражением ***(8).***

С учётом того, что при определённых соотношениях радиусов и углах ввода α близких, но не равных углу полного внутреннего отражения , в каждой точке отражения τ_l могут возникать условия, при которых часть энергии запущенного светового пучка будет выходить из сетоводной полости наружу, создавая растр лучей , распросраняющихся в секторе углов, доходящем до 360°.

Все вышеприведённые теоретические предпосылки нашли полное подтверждение в экспериментальных исследованиях.

На Рис3 приведены фотографии экспериментального наблюдения геометрических модовых траекторий с помощью элементов фрактальной оптики.

Характерно, что угловое положение заполняющих растр парциальных лучей полностью соответствует выражениям (2), (3), (4) для однофрактальных систем и выражениям (11), (12), (4) для бифрактальных систем.

Автором получены также результаты по описанию траекторий движения фотонов уравнениями макроволновой амплитудно-угловой модуляции вида :

$$Y=R_0+U_{m0}(\varphi)\cdot S'(t)\cdot \sin(\omega t); \tag{14}$$

$$X=R_0+U_{m0}(\varphi)\cdot S'(t)\cdot \cos(\omega t); \tag{15}$$

В этих выражениях амплитиудная ($S'(t)$) и угловая ($U_{m0}(\varphi)$) модулирующие функции имеют частоту изменения выше чем частота несущей ω**.** Их периоды связаны с временем свободного пробега фотонов от одного отражения от поверхности радиуса r до другого отражения от поверхности радиуса R.

Тот факт , что геометрические модовые траектории фотонов, распространяющихся внутри элементов фрактальной оптики описываются макроволновыми уравнениями позволяет утверждать, что это открывает уникальные возможности построения целого ряда новых устройств дискретной цифровой оптики.

Однако полученный математический аппарат выходит за рамки настоящей статьи и является предметом самостоятельного научного исследования .

Публикация результатов упомянутых исследований предусмотрена в рамках планируемого цикла статей.

Выводы:

1. Обоснованы фрактальные свойства нового класса оптических элементов внепараксиальной оптики многократного отражения.

2. Проведено математическое моделирование, подтверждающее многопараметрическую фрактальность движения световых лучей в децентрированных световодах.

3. Разработаны элементы математической модели распространения и преобразования световых лучей и волновых фронтов для центрированных элементов фрактальной оптики.

4. Показано, что увеличение размерности пространства параметров распространения световых лучей в разных классах световодных элементов преодолимо с точки зрения их теоретического описания.

При этом выявляются особые свойства фрактальной оптики;

- иерархическая структурная организация распространения каустик лучей в световодах,

- возможность использования принципов самоподобия траекторий движения лучей для создания растровых систем подсвета,

- иерархическое распределение точек и углов ввода лучей в сегментированные элементы фрактальной оптики, обеспечивающее возможность создания систем сканирования с оптической редукцией секторов каустических и растровых лучей формируемого когерентного и немонохроматического излучений в зависимости от конкретных требований .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Мельников Г.С. Гносеология фрактальности. См. настоящий сборник (в печати)

2. Мельников Г.С., Космачев А.Ф., Шишкин М.Ю. Методика лучевого описания растровых явлений в цилиндрической линзе, работающей в области полного внутреннего отражения, Л., ГОИ, 1986 г., Тезисы докл. IV Всесоюзной конференции "Теоретическая и прикладная оптика"

3 Мельников Г.С. Цифровая обработка сигналов на систолических проциссорах.// Препринт N 9-91,1991г, 61с., Львов, НТЦ ВПВС, "Интеграл".

4. Melnikov G.S., Larionov S.A. Mikheev P.A., Tzvetkov E.A. // 5th International Conference on Differential Satelite Navigation Systems , v II, Post Sect. 1, [1]11, St. Petersburg, RIRT, 1996

5.Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах Из-во "Наука", М., 1974г.,327стр.

БЛАГОДАРНОСТИ.

Настоящая статья является первой статьёй из серии статей, написание которых стимулировалось интересом проявленным к рассматриваемой проблеме компанией Defence Group Inc. (США).

Особую признательность автор выражает Мельниковой Э.И. и Юриновой Г.И. за долготерпение , понимание и постоянную моральную и материальную помощь.

Колегам по работе и соавторам отдельных публикаций С.А. Ларионову, П.А. Михееву и Е.А. Цветкову моя признательность за единомыслие в теоретической и экспериментальной интерпретации освещаемого нового раздела физики.