

УДК 681.327.12:621-397.3+517.518.224+514.174

**Фрактальная концепция геометрического поля пространственных частот объединенного Евклидово-Риманова пространства-времени.
Моделирование сверхплотных многомерных и фрактальных структур.**

© 2004 Г.С. Мельников., А.А. Ошарин
НП ОС "ТКС-Оптика" (г. Санкт-Петербург)

E-mail: Gmelnikov@list.ru

В последние годы в науке и философии широко обсуждается вопрос решения задачи математических бильярдов в круге [1...5,12...14]. К настоящему времени найдено решение и более общей задачи математических бильярдов в сфере [4,5]. Решения первой задачи найдены в комплексной плоскости с параметрическим построением любой заданной траектории "бильярдного шара" и всех его комплексных отображений текущих координат шара во внешнее и внутренние пространства круга. Вторая задача, также, решена параметрически. Она решена в 3D Евклидово-Римановом пространстве-времени в гипер-комплексных аналитических функциях. Вопросам физико-математического анализа результатов исследования и моделирования посвящена настоящая статья.

Введение

Вывод и моделирование уравнений геометрического поля пространственных частот, изложенные в [1,2,...5] требуют их всестороннего анализа.

Прежде чем обратиться к этой задаче, уместно процитировать слова известного Российского астрофизика Ф.А. Цицина о фрактальной парадигме [6].

"Итак, наша Вселенная „изменилась" – она стала фрактальной... А точнее, необратимо изменилась наша картина мира, – и астрономическая тоже. Совершенно несомненно, – какие бы с нею дальше ни происходили изменения, какие бы ни совершались научные революции – аспект фрак-

тальности навсегда вошел в нее, в ее „твердое ядро" принципов-постулатов, и не будет устранен, изъят из НКМ ни при какой ревизии" [6].

Для объяснения утверждения Ф.А. Цицина воспользуемся еще цитированием фрактальных аксиом из работы молодого аспиранта Бурятского НЦ СО РАН Балханова В. К. [7]

Фрактальная геометрия Бенуа Б. Мандельброта основывается на экспериментальном факте, что в общем случае длина L произвольной кривой (которая может быть изломана в любой точке) степенным образом зависит от масштаба измерения δ [8,9]:

$$L = C \cdot \delta^{1-D} \tag{1}$$

Здесь C - размерный множитель, свой для каждой кривой, D - фрактальная размерность; Очевидно, что как вся линия, так и любой ее участок обладают одной и той же фрактальной размерностью. Такое свойство называется самоподобием (скейлинг, масштабная инвариантность). Самоподобие означает, что как вся линия, так и любой ее участок обладают одной и той же фрактальной размерностью. Если линию увеличить в λ раз, то для измерения новой длины λL достаточно использовать масштаб, равный $\lambda \delta$, т.е.

$$\lambda L = C \cdot (\lambda \delta)^{1-D} \tag{2}$$

При решении различных задач бывает полезным дать другую формулировку исходных аксиом. Во первых, длину измеряют, подсчитывая число масштабов, т.е.

$L = N(\delta) \cdot \delta$, где $N(\delta)$ - необходимое число шагов (растворов циркуля), с которым масштаб обходит всю линию, при этом из (1) следует, что $N(\delta) = C \cdot \delta^{-D}$. В новом масштабе, равном

$$\delta^* = \lambda \delta, \tag{3}$$

длина будет $L^* = C \cdot \delta^{*1-D}$. Подставляя (3) в выражение для L^* , получаем $L^* = C \cdot \lambda^{1-D} \cdot \delta^{1-D}$. Но здесь $C \cdot \delta^{1-D}$ есть исходная длина, равная

$$N(\delta) \cdot \delta, \text{ следовательно} \tag{4}$$
$$L^* = \lambda^{1-D} \cdot N(\delta) \cdot \delta.$$

С другой стороны, $L^* = N(\delta^*) \cdot \delta^*$, или $L^* = N(\lambda \cdot \delta) \cdot \lambda \cdot \delta$. Сравнивая последний результат с (4), приходим к замечательному результату:

$$N(\lambda \cdot \delta) = \lambda^{-D} \cdot N(\delta). \tag{5}$$

В таком виде обычно и записывают условие само подобия, подразумевая под N любую функцию от своих аргументов с отличным от D показателем.

В развиваемых далее в [7] Балхановым В.К. положениях о фрактальном исчислении, не имеется ссылок на аналогичные работы А.Д. Сахарова, Ф.А. Цицина, [6] и сравнений его результатов с результатами полностью

решившего эту задачу еще в 1880х годах В.А. Летникова [10]. Тем не менее, приведенная аксиоматика (5) представляет большой интерес. Эта аксиоматика применима, с точки зрения анализа комплексных, само подобных отображений двумерных и трехмерных траекторий математических бильярдных в круге и сфере. А эти комплексные и гиперкомплексные отображения, в свою очередь, являются основаниями Геометрического Поля Пространственных Частот объединенного Евклидово-Риманова пространства-времени [4,5].

1. Анализ само подобной структуры комплексных и гиперкомплексных отображений траекторий математических бильярдных.

Задача, поставленная в настоящем разделе, на первый взгляд, является надуманной и имеющей чисто математический интерес. С другой стороны, если предположить, что комплексные и гиперкомплексные отображения математических бильярдных в круге и в сфере раскрывают принципы построения реальных плоскостей и объемных конфигураций окружающего нас пространства-времени, то к такой постановке вопроса следует подходить более внимательно.

Рассуждая о возможной размерности пространства в статье [6], Ф.А. Цицин пишет: “Допустимо предположить, что размерность эта может оказаться и не обязательно дробной (подобно тому, как целочисленной, но более высокой, чем у обычной линии, оказывается размерность броуновской траектории, см. равна 2). Какова же она окажется, в конце концов? Четыре? „Восемь с половиной”? Или 5061010..? Тем более остается открытым вопрос о смысле и, далее, о физической реализации во Вселенной комплексной (и в частном случае, чисто мнимой) размерности пространства... И, пожалуй, совершенно не в наших силах представить себе, что могла бы значить дробная размерность (да еще комплексная...) космологического времени”. И далее...

“Ныне „все согласны” с тем, что наша фундаментальная физика имеет определенные границы. Во всяком случае, пока материя находится на сингулярной стадии раздувания, в „планковской фазе”, средств для описания ее эволюции у нашей физики нет. Для этого нужна единая квантово-гравитационная теория, так сказать, теория структуры, свойств и эволюции (!) физического вакуума. Вопрос о ее создании был поставлен по существу еще в 30-х гг. М.П. Бронштейном.

Учитывая возможность применения развиваемых в настоящем исследовании положений к теории структуры пространства-времени, решим поставленную задачу.

Прежде всего, рассмотрим принципы комплексных и гиперкомплексных отображений во внешнее и внутреннее пространства траекторий математических бильярдных в круге и сфере.

Эта возможность появляется сразу, как только мы принимаем точку зрения по рассмотрению отдельного участка траектории движения бильярдного шара от одного отражения до другого отражения за вектор. Далее, основываясь на теории аналитических функций, например [11] и тройственном характере отображения комплексных чисел:

-комплексное число это вектор,
 -комплексное число это точка на комплексной плоскости,
 -комплексное число это оператор поворота,
 мы сразу приходим к бесконечному множеству отображений движения бильярдного шара, как во внешнее, так и во внутреннее пространство математических бильярдных. При этом, каждая из траекторий бильярдного шара, построенная из конечного или бесконечного числа векторов, отображается в виде дискретных, само подобных, разномасштабных структур с бесконечным увеличением или уменьшением масштабов во внешнее и внутреннее пространства математических бильярдных, за исключением векторных траекторий бильярдных шаров, делящих круг или центральные сечения сферы на число (коэффициент фрактальности) равное 6 [2,...5]. Только эти траектории комплексно само отображаются в реальном круге или центральном сечения сферы в силу равенства длин векторов радиуса круга (сферы). Все остальные отображения формируются на сферах с радиусами

$$R_d = R \cdot (2 \cdot \sin(\frac{\pi}{k}))^d \quad (6)$$

где: - R -радиус круга (сферы) исходного математического бильярда,

- $2 \cdot \sin(\frac{\pi}{k})$ - масштабный множитель λ в выражении (2),

- d -показатель комплексного или гиперкомплексного отображения (не путать с фрактальной размерностью D)

- k – коэффициент фрактальности, делимости текущих окружностей R_d вписанным многогранником (траекторией бильярдного шара или траекториями его комплексных отображений).

На первый взгляд, комплексные отображения реальных лучей (векторов) формирующих траектории реальных и комплексных перемещений математического бильярдного шара должны ограничиться на каком-то шаге отображения d . По крайней мере, так это происходит при моделировании комплексных отображений для двух пар ортогонально сопряженных в пространстве правильных Платоновых тел: “тетраэдр-тетраэдр”и “куб-октаэдр”. В этом предположении можно убедиться, рассмотрев последовательности пространственных отображений тетраэдра и

куба, методами переноса их ребер (рассматриваемых в нашей модели как реальные векторы) к центру выбранной системы координат. В этом преобразовании концы векторов можно замкнуть плоскостями, в результате чего образуется пространственные фигуры внешнего комплексного отображения с $d=1$, относительно выбранной пространственной конфигурации с $d=0$. В свою очередь, вершины реальной исходной траектории, с $d=0$, рассматриваются как вершины центрированных векторов фигуры комплексного отображения с $d=-1$. (См. Табл.1 и Табл.2)

Как видно из приведенных построений, как для тетраэдра, так и для фигур октаэдра и куба пространственные комплексные отображения приводят к фигурам усеченного куба, т.е. к фигуре, у которой ребра равны радиусу описывающей его сфере. А это говорит о том, что коэффициент фрактальности у векторов этих фигур равен 6. То есть, ребра этих фигур (векторы) будут само отображаться на описанной сфере. Другими словами дальнейшее комплексное отображение реальных составляющих векторов замыкается на внешней и внутренней сфере комплексных отображений тетраэдра куба и октаэдра. Каким же образом получается моделирование комплексных отображений векторных траекторий, представленных на [Рис. 3 г в [5]] в дальней зоне пространства-времени в программе Mathematica 4.2? Объяснение этого эффекта “мгновенных” комплексных отображений пространственных конфигураций реального пространства можно дать только с точки зрения, учитывающей следующее предположение. Отображения формируются за счет мнимых составляющих пространственных конфигураций, а эти мнимые составляющие есть продукт фрактальной структуры пространства времени. Геометрическое обоснование этому предположению дается в разделе 2 настоящей статьи. Исходные предпосылки базируются на взглядах авторов статьи, обоснованных новым прочтением базовой фрактальной конструкции – снежинки Коха и принципах моделирования пространственной конфигурации – абсолютный куб [17].

Таблица 1




d	Фигура	R описанной окружности
0		$R_{ot} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot L =$ $= \text{Sin} \frac{\pi}{4} \times \text{Sin} \frac{\pi}{3} \times L$ <i>L – длина ребра</i>
Схема комплексных отображений		$R_o = L = \frac{4}{\sqrt{6}} R_{ot}$ <i>L – длина ребра</i>
1		$R_o = L =$ $= \frac{R_{ot}}{(\text{Sin} \frac{\pi}{4} \times \text{Sin} \frac{\pi}{3})}$ <i>L – длина ребра</i>

Таблица 2


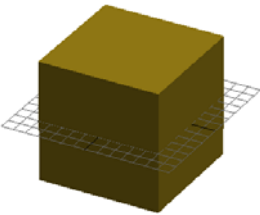
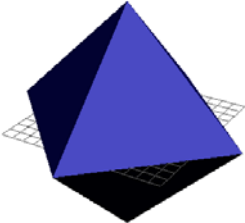

d	Фигура	R описанной окружности
-2		$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L$ <i>L – длина ребра</i>
-1		$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L$ <i>L – длина ребра</i> $R = R_{норма}$
0		$R = L$
1		$R = \sqrt{2} \cdot L$ <i>L – длина ребра</i>

Табл.1 и Табл.2. Реальные пространственные конфигурации (d=0) и их комплексные отображения во внешнее (d=1) и внутреннее (d=-1) пространства исходной конфигурации.

2. Принципы построения многомерных и фрактальных структур

Природа волновых явлений и комплексных отображений пространственных конфигураций может быть осознана с позиций гиперкомплексной геометрии. Сравнивая различные точки зрения по построению простой кубической и фрактальной упаковок пространства решеточными и полостными структурами можно прийти к этому заключению. Это сравнение позволяет разобраться во фрактальной структуре числового континуума [1...5].

Как показано в работах Н.А. Стрелкова [15], при рассмотрении различных математических задач, например, для численного решения краевых задач, аппроксимации функций, обработки сигналов и т.д., широко используются проекционно-сеточные методы описания проекционно-сеточных подпространств.

Каждое из таких подпространств определяется выбором функции (или нескольких функций) и сеток, по которым сдвигаются аргументы этих функций.

При этом установлено, что для того чтобы решетка Λ была оптимальной (оптимальные решетки – такие решетки Λ , которые удовлетворяют условию $V(\Lambda) = Nh$) необходимо и достаточно, чтобы решетка $2\pi\Lambda^*$ порождала плотнейшую

$\frac{2\pi^n}{Nh}$ (по определению [15]) решетчатую N -кратную укладку множеств Ω_e .

В [15] доказано, что одна и та же решетка Λ , сопряженная к которой, порождает плотнейшую укладку одинаковых шаров в E_n , оптимальна одновременно для всех совокупностей пар (W_2^s, W_2^m) при любых $s < m$.

По результатам этого исследования Н.А. Стрелковым построены решетки, порождающие плотные укладки.

По Н.А. Стрелкову оптимальными являются решетки (с точностью до поворотов, переносов и преобразований подобия):

а) для $n=2$ – правильная треугольная с базисом $(2,0)$, $(1, \sqrt{3})$

б) для $n=3$ – решетка с базисом $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$ так называемая *бсс* – решетка, получаемая из кубической решетки добавлением центров фундаментальных кубов, или, что то же самое, объединение двух кубических решеток, сдвинутых одна относительно другой на полшага в каждом из трех направлений ребер.

Авторами настоящей статьи установлены и промоделированы алгоритмы построения простых, сверхплотных и плотнейших проекци-

онно-сеточных подпространств типа *bcc* – решеток на примере интерпретации классического фрактала – «снежинки Коха» (Рис.1). Кроме того, доказано, что плотнейшие сеточные укладки порождают укладки не одинаковых шаров в E_n , а, в соответствии с гиперкомплексной геометрией, состоят из шаров с радиусами R , $\sqrt{2} \cdot R$ и $\sqrt{3} \cdot R$

2.1. Методы построения многомерных и фрактальных структур

По мнению Ю.А. Данилова с Д.Д. Кадомцевым, размерность объекта зависит от наблюдателя, точнее от связи объекта с внешним миром [16]. Исходя из этого в [3], было доказано, что размерность классического фрактала «снежинка Коха» с двумерной точки зрения наблюдателя имеет фрактальную размерность отличную от размерности Б. Мандельброта ($d = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,2618$). Т.е. доказано, что «снежинка Коха» не является плоской кривой двумерной плоскости, а является многослойной фрактальной конструкцией и ее топологическая размерность составляет $d = \ln 7 / \ln 2 \approx 2,80735 \dots$ (См Рис 1а). С другой точки зрения трехмерного наблюдения, топологическая размерность составит $d = \ln 9 / \ln 2 \approx 3,1699250$, а при предельном стремлении итеративных операций поворота и фрактализации по алгоритму [3] исходных фигур - двух тетраэдров, фрактально заполняется элементарная кубическая ячейка пространства.

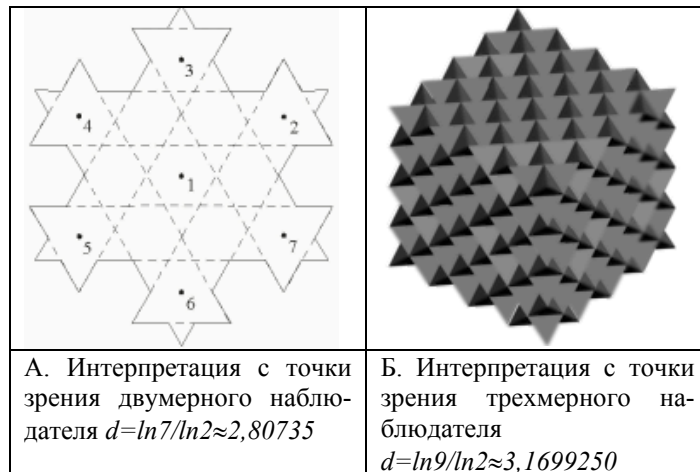


Рис 1. Многомерные интерпретации классического фрактала «снежинка Коха».

При выводе топологических размерностей авторы использовали аксиоматический аппарат (1...5)

В основе метода лежат операции фрактального масштабирования и разнесения исходных фигур в новые центры пространственной фрактализации, так же как это осуществлено с пространственным построением сверхплотной конфигурации – «абсолютный куб» [17].

Объемный вид симплекса	Сечение симплекса (плоскость, содержащая две информационные оси $\sqrt{3}$)	Сверхплотная суммарная кубическая упаковка симплекса	Сверхплотная суммарная сферическая упаковка симплекса	Диагональное сечения сферической упаковки
Плотная упаковка пространства сферическими симплексами по принципу простой кубической структуры		Сверхплотная упаковка пространства сферическими симплексами по принципу фрактализации абсолютного куба «Айрэс» [17].		

Табл. 3. Моделирование плотной и сверхплотной упаковок пространства.

Результатом всех названных исследований явилось построение общей физико-математической модели классификации многогранников и оптимальных решеточных и полостных структур плотного и сверхплотного выполнения пространства [18] с использованием обобщенной Эйлеровой характеристики в следующей трактовке:

$$N^d = \frac{T + F + R}{2} - \text{число информационных осей симметрии (7)}$$

где,

d - топологическая размерность характеристики;

T - число вершин;

F - число граней;

R - число ребер многогранников. При рассмотрении этой характеристики применительно к правильным Платоновым телам можно убедиться в справедливости расширенной характеристики

$$N^d = \frac{T + F + R}{2} = R + 1 = T + F - 1 \quad (8)$$

Не составляет труда убедиться, что эта характеристика приводится к хорошо известной теореме Эйлера для многогранников

$$T + F = R + 2 \quad (9)$$

Другими словами, введенная характеристика N^d справедлива для описания всех Эйлеровых многогранников.

Обобщенная характеристика – **число информационных осей симметрии** позволяет вычислить для любой многогранной структуры не только известные из теории симметрии оси, но и перечислить также направления (или оси) их естественного роста, т.е. простой трансформации концентрического подобия.

Как отмечает Ю.А. Данилов [16], средний квадрат расстояния для фрактальной среды оказывается пропорциональным некоторой дробной степени времени, показатель которой связан с фрактальной размерностью среды. Эти предпосылки и дали возможность авторам объяснить свойства гиперкомплексного описания пространственных конфигураций и описания циклических процессов происходящих в них.

Тем самым мы показали, что порядок лежит в основе фрактальных структур изначально, как алгоритмическая операция итерационного построения их пространственно – временных конфигураций.

Литература:

- Melnikov G.S. Gnoseology of fractality – fractal optics, Proc. SPIE 1997, vol.3010, p. 58-68 (www.spie.org/abstracts/3000/3010.html)
- Г.С. Мельников. Вывод и моделирование уравнений геометрического поля пространственных частот. // Журнал оптика и спектроскопия Рег.№ 136 от 6.05.2003г в печати http://soi.srv.pu.ru/r_1251/investigations/fractal_opt/index.html
- Г.А. Донцов, Г.С. Мельников, И.Н. Серов, Фрактальная концепция детерминированного хаоса. Философия науки, №3, Новосибирск, 2003, с. 35-52. http://soi.srv.pu.ru/r_1251/investigations/fractal_opt/index.html
- Г.С. Мельников. Геометрическое поле пространственных частот. Вывод параметрических уравнений гиперкомплексных отображений дискретных циклических процессов. Наст. сб. Стр. ...
- Г.С. Мельников. Геометрическое поле пространственных частот. Результаты математического моделирования гиперкомплексных отображений дискретных циклических процессов. Наст. сб.Стр.
- Ф.А.Цидин Астрономическая картина мира: новые аспекты, Научное издание "Астрономия и современная картина мира" Институт философии РАН, Москва, 1996г
- Балханов В. К. Основы фрактального исчисления <http://www.laboratory.ru/articl/math/am070r.htm>
- Benoit Mandelbrot. Mecanique statistique et theorie de L'information. J. Quanta d'information, t.232, p. 1638-1640, 1951.
- Benoit Mandelbrot. The fractal geometry of nature. New York NY and Oxford UK: W. H. Freeman & Co., 1982
- Шостак Р.Я. Алексей Васильевич Летников (1837-1888) // Историко-математические исследования. Вып. 5. М., 1951. С. 167-238.
- А.И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций. М., "Наука", Г.Р.Ф-М.Л, 1978 г., 415 с.
- Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков. Математические бильярды. М., "Наука", ГРФМЛ, 1990 г., 287с.
- Мельников Г.С., Ларионов С.А., Михеев П.А., Цветков Е.А.// Изв. АН, Серия физическая, М., 1995., т 59, N12, с143...150ю Gennady S. Melnikov, Sergey A. Larionov, Pyotr A. Mikheev, Eugeny A. Tsvetkov "Discrete scanning systems for digital optical processing and transfer of images by systolic methods", journal B.R.A.S PHYSICS, Vol.59 No. 12 1995, pp2097-2103 Allerton Press, Inc./ New York.
- Мельников Г.С., Ларионов С.А., Михеев П.А., Цветков Е.А. "Способ создания временных задержек светового потока". Патент РФ N 2109257 G01 J 9/00, G02 B 27/14 по Заявке N 95114222/25 от 07. 08. 1995. Официальный Бюллетень Российского Агентства по Патентам и Товарным Знакам "Изобретения" N 11 (II ч), 2108694-2109417, стр. 298 - 299, 20.04.1998г. ; Патент N 2109257 зарегистрирован в Государственном реестре изобретений 20 апреля 1998 года.
- Н.А. Стрелков. Оптимальные координатные функции в проекционных разностных методах, поперечники и решетчатые укладки. Докл. АН СССР, т. 309, №3, 1989г, стр. 550 – 554.
- Ю.А.Данилов, Б.Б.Кадомцев "Нелинейные волны. Самоорганизация" - М., Наука, 1983.
- И.Н. Серов. Аналитическое программирование информационно обменных процессов активных биологических форм. Общий курс ВІР «AİRES», С-Петербург, 2002, Изд-во «Акцидент».
- Г.С. Мельников. Физико-математическая модель решетчатых и шаровых упаковок пространства. Записки Российского Минералогического общества, Рег.№ от 30.12.2003г (в печати).